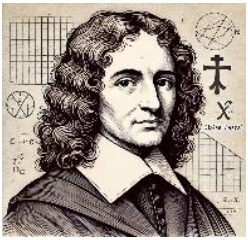
Pascalův trojúhelník
svět čísel plný překvapení



Na první pohled vypadá Pascalův trojúhelník jako jednoduchá tabulka čísel. Když se do něj ale podíváte pozorněji, objevíte svět plný pravidel, souvislostí a překvapení. Je to jedna z nejkrásnějších matematických struktur, která už po staletí fascinuje matematiky, vědce i studenty po celém světě.

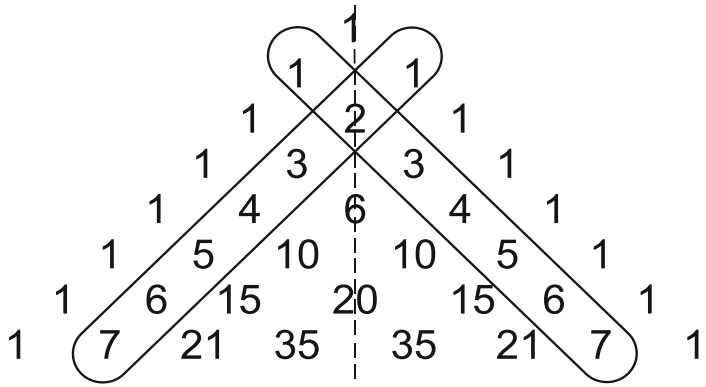
V tomto trojúhelníku se skrývají symetrie, mocniny čísel, Fibonacciho posloupnost, kombinatorika, prvočísla i základy fraktálů. Stejný princip nachází uplatnění v informatice, statistice, fyzice i při výpočtu pravděpodobnosti. Pascalův trojúhelník tak není jen matematickou zajímavostí – je klíčem k pochopení mnoha jevů kolem nás.

Tato dřevěná stavebnice vám umožní objevovat jeho tajemství vlastníma rukama. Místo pouhého čtení budete čísla skládat, přesouvat, porovnávat a hledat jejich vzájemné vztahy. Každý nový obrazec nebo pravidlo, které objevíte, vám ukáže, že matematika není jen počítání, ale také hledání krásy, logiky a souvislostí.

Návod nabízí řadu úloh a aktivit od jednoduchých až po náročnější. Některé zvládnou děti na prvním stupni základní školy, jiné jsou určeny starším žákům, studentům nebo každému, kdo má chuť objevovat. Můžete pracovat sami, ve dvojici i ve skupině a pokaždé najdete něco nového.

Přejeme vám radost z objevování, trpělivost při hledání řešení a mnoho okamžiků, kdy si řeknete: „**Aha, tak takhle to funguje!**“ Právě tak začíná opravdové poznání.

Symetrická čísla



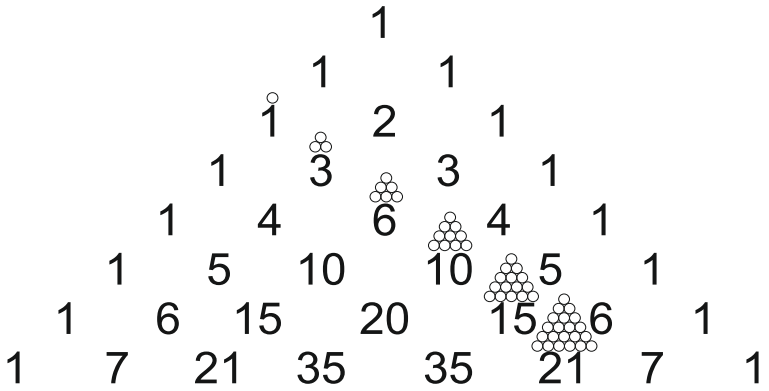
Dva nejvýraznější vzory, které z trojúhelníku vycházejí, jsou jeho bilaterální symetrie – levá a pravá polovina stromu se dokonale zrcadlí – a pohled na známá počítací čísla pochodující po vnitřních diagonálách na každé straně.

Mocniny dvou

$$1 = 1 = 2^0$$
$$1 + 1 = 2 = 2^1$$
$$1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$$
$$1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$$
$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$$
$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$$
$$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6$$
$$1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128 = 2^7$$

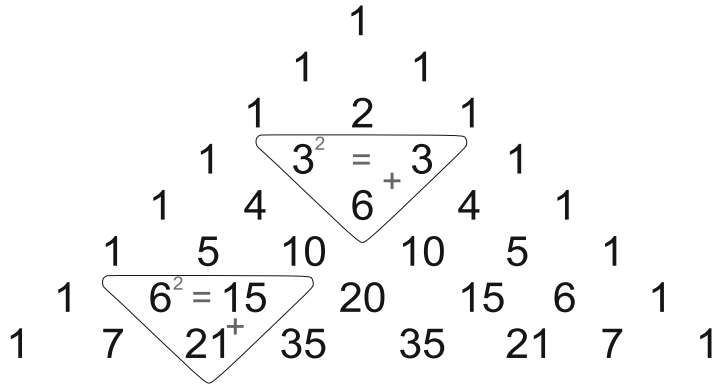
Sečtením všech čísel v každém řádku získáte všechny mocniny dvojky (a dokážete, že 2 na nultou se ve skutečnosti rovná 1).

Trojúhelníková čísla



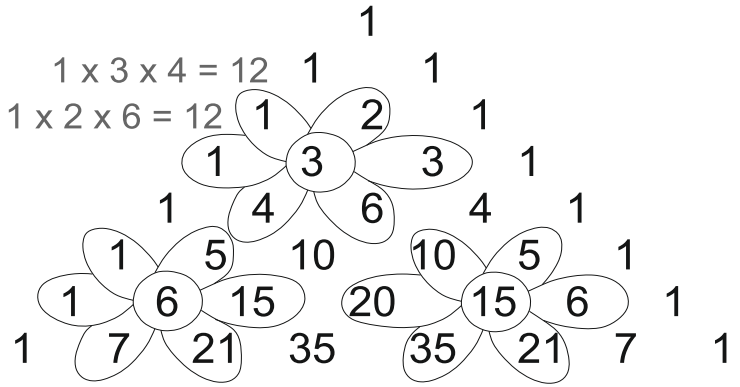
Počítání čísel podél první vnitřní diagonály jsme již viděli – nyní se zaměřme na druhou. Technicky vzato postačí jeden dílek, ale tak by matematici nazvali triviální trojúhelník. Tři by byly hezčí. Svůj dílkový trojúhelník můžete rozšířit přidáním dalších tří (celkem šesti) pod původní malý trojúhelník – nebo ještě dále přidáním dalších čtyř (celkem deset).
Čísla, která se nejlépe hodí pro vytváření trojúhelníků, se vhodně nazývají trojúhelníková čísla a objevují se podél druhých vnitřních diagonál na každé straně.

Umocnění sčítáním



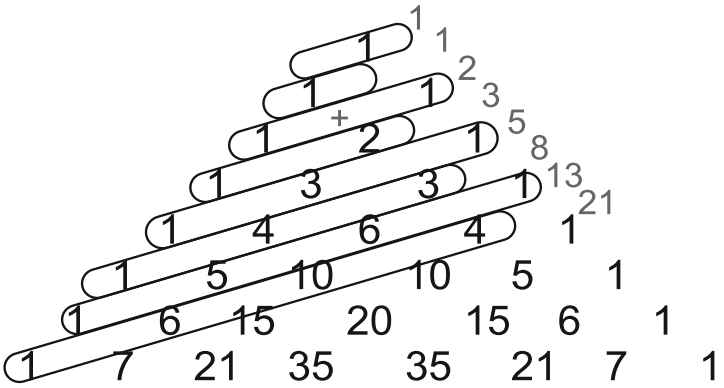
Vyberte libovolné číslo z první úhlopříčky a umocněte ho. Pak se podívejte na jeho dvě sousední čísla, která leží hlouběji uvnitř trojúhelníku – jejich součet vždy dá stejnou druhou mocninu.

Proplétající se okvětní lístky



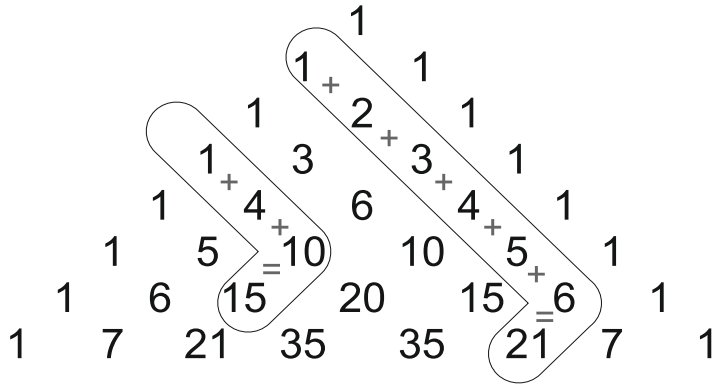
Vyberte si libovolné číslo uvnitř Pascalova trojúhelníku a podívejte se na šest čísel kolem něj (která tvoří střídavé okvětní lístky v květinách nakreslených výše). Pokud vynásobíte čísla v každém druhém okvětním lístku, dostanete stejný výsledek bez ohledu na to, se kterým okvětním lístkem začnete.

Fibonacciho posloupnost



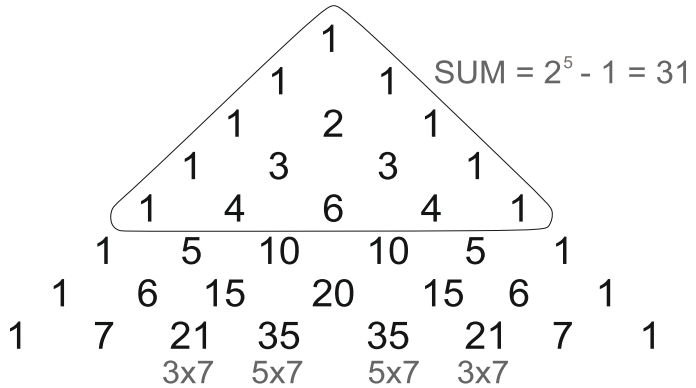
Posloupnost Fibonacciho čísel začíná 1 a 1, každé následující číslo je součtem dvou čísel, která následovala bezprostředně před ním. Poprvé je popsal v roce 1202 Fibonacci (neboli Leonardo z Pisy) v souvislosti s králíky, kteří se dokázali rychle množit.
V Pascalově trojúhelníku je těžké je najít, ale dají se vylákat z úkrytu! Najdete je roztroušené po „krátkých diagonálách“ trojúhelníku – sečtením čísel v těchto krátkých diagonálách si můžete dát dohromady Fibonacciho čísla.

Přidávání hokejky



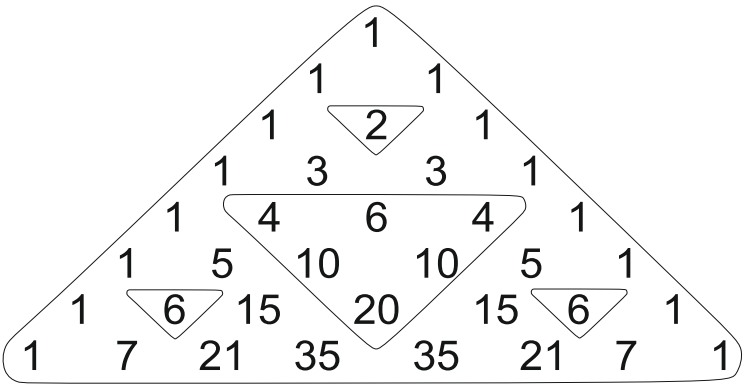
Počínaje libovolnou jedničkou na nejvzdálenějším okraji sečtěte libovolný počet čísel podél jedné z diagonál. Kdekoli se zastavíte, zjistíte, že váš součet čeká jen o jeden diagonální krok dále – v opačném směru, než kam jste mířili (odtud vzorec „hokejky“).

Prvočísla



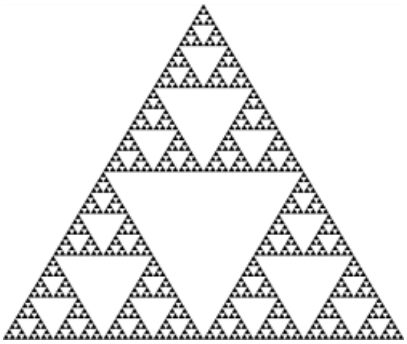
Pokud sečtete všechna čísla v prvních n řádcích, získáte n-té Mersenneovo číslo (což je číslo, které je o 1 méně než 2 na mocninu n). Mersenneova čísla se používají na špici matematického výzkumu k nalezení opravdu velkých prvočísel, protože mají velmi zajímavou vlastnost: pokud je n prvočíslo, pak bude občas i n-té Mersenneovo číslo prvočíslo.
Například sečtením všech čísel v prvních 5 řádcích Pascalova trojúhelníku získáme 5. Mersenneovo číslo, 31 (což je o 1 menší než 2 na 5). Protože 5 je prvočíslo, existuje možnost, že i 31 by mohlo být prvočíslo
Pokud se podíváte na řádek, jehož počítané číslo na první vnitřní diagonále je prvočíslo (např. 7), pak každé další číslo v tomto řádku trojúhelníku bude násobkem tohoto prvočísla. S výjimkou jednotek na vnější straně.

Sierpinského fraktál

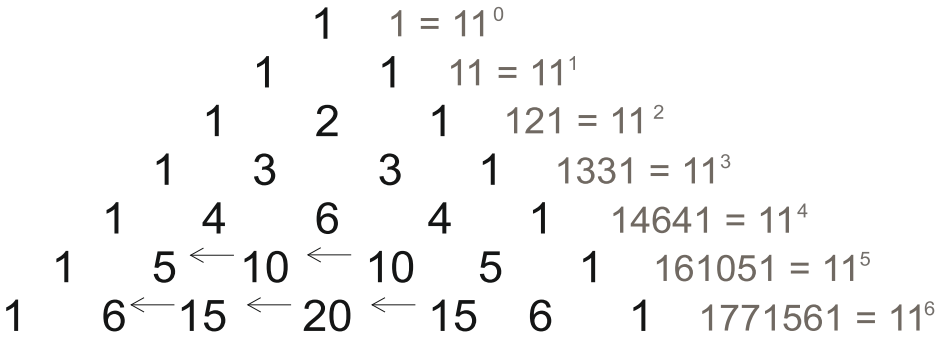


A teď k mému nejoblíbenějšímu Pascalovu vzoru – nikdy nepřestávám žasnout nad tím, jak se nejkrásnější fraktální trojúhelník nenápadně skrývá i v Pascalově trojúhelníku.
Siepinskiho trojúhelník je tvar, který získáte, když vezmete rovnostranný trojúhelník, odříznete prostřední část, poté odříznete prostřední části ze všech zbývajících menších trojúhelníků a pak pokračujete donekonečna (nebo dokud vás to neomrzí).

Jak to souvisí s Pascalovým trojúhelníkem? Podívejte se, co se stane, když vybarvíte všechna lichá čísla jednou barvou a všechna sudá čísla jinou, jako v našem případě.



Mocniny jedenácti



Pro obzvlášť zajímavý trik se podívejte, co se stane, když všechna čísla v daném řádku stlačíte dohromady a vytvoříte jedno velké číslo.
Ve skutečnosti musíme být trochu opatrní, když pracujeme s dvojcifernými čísly a podobně – místo toho, abychom je jen stlačili dohromady, přesuneme přebytečnou číslici doleva (podobně jako při sčítání na základní škole). Například když stlačíme řádek 1-4-6-4-1, dostaneme číslo 14641. Ale když stlačíme řádek 1-5-10-10-5-1, rozdělíme desítky na 1 (která se přičte k číslu vlevo) a 0 (která zůstane na místě).

Po rozdělení první desítky tímto způsobem se řádek změní na 1-(5+1)-(0)-10-5-1
Po rozdělení druhé desítky řádek skončí jako 1-(5+1)-(0+1)-0-5-1 neboli 1-6-1-0-5-1 a nakonec dostaneme číslo 161051 (věřte mi, že je to mnohem snazší udělat, než popsat!).

Stejně jako spojení čísel v řádku jejich sečtením nám dává mocniny dvojky, spojení čísel v řádku jejich stlačením takto nám dává mocniny jedenácti!
Všimněte si také, že 11 na nultou se ve skutečnosti rovná 1…

Všechny kombinace

$$(x+y)^0 = 1$$
$$(x+y)^1 = 1x + 1y$$
$$(x+y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$$
$$(x+y)^3 = 1x^3 + 3xy^2 + 3xy^2 + 1y^3$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\ \binom{7}{0} & & \binom{7}{1} & & \binom{7}{2} & & \binom{7}{3} & & \binom{7}{4} & & \binom{7}{5} & & \binom{7}{6} & & \binom{7}{7} \end{array}$$

Vraťme se krátce k historickým kořenům Pascalova trojúhelníku. Jak již bylo zmíněno, všechna čísla v Pascalově trojúhelníku ve skutečnosti odpovídají kombinacím – to znamená, že nám přesně říkají, kolika způsoby můžeme vybrat malou skupinu objektů z větší skupiny (pokud na pořadí, ve kterém věci vybíráme, nezáleží).

Kombinace jsou pro teoretiky pravděpodobnosti a jejich přátele hazardní hry velmi důležité, protože spočítání počtu způsobů, jakými se něco může stát, je nejpřímějším způsobem, jak určit pravděpodobnost, že se to stane.

Kombinace lze zapsat různými způsoby, ale nejběžnějším zápisem je umístit dvě čísla do závorek – jedno nahoře (aby nám sdělilo celkový počet objektů) a jedno na spodní číslo (aby nám sdělilo, kolik z těchto objektů si vybereme). A tyto kombinace dokonale odpovídají Pascalovu trojúhelníku – horní číslo odpovídá řádku trojúhelníku a spodní číslo nám říká, jak daleko v řádku máme jít.

Binomické koeficienty

$$(x+y)^0 = 1$$
$$(x+y)^1 = 1x + 1y$$
$$(x+y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$$
$$(x+y)^3 = 1x^3 + 3xy^2 + 3xy^2 + 1y^3$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\ 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\ \binom{7}{0} & & \binom{7}{1} & & \binom{7}{2} & & \binom{7}{3} & & \binom{7}{4} & & \binom{7}{5} & & \binom{7}{6} & & \binom{7}{7} \end{array}$$

Pascalův trojúhelník může dokonce značně usnadnit i obávanou algebru na střední škole. Pokud se ocitnete v nešťastné situaci, kdy musíte rozvinout (x+y) na n-tu, můžete rovnou přeskočit všechny ty hrozné výpočty a jít rovnou k řešení.

Začněte tím, že si zapíšete všech n vynásobených x a postupně zleva doprava odebírejte jedno x a nahrazujte ho y, dokud nezůstanou žádná x.
Jakmile sečtete všechny tyto členy, zbývá už jen doplnit správné koeficienty.
To by byla nejtěžší část cvičení… nebýt toho, že je dokážete přečíst přímo z Pascalova trojúhelníku! Stačí přejít na řádek, který má n na první vnitřní diagonále, a ony na vás budou čekat. Tajemství této magické zkratky spočívá v binomické větě pro rozvinutí závorek – a také ve skutečnosti, že číslice v Pascalově trojúhelníku jsou ve skutečnosti maskované kombinace…